Mathematik für Informatiker (MI) Probeklausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach

21. Januar 2002, revidiert 5. Februar 2002

Maximale Punktzahl: 28, Mindestpunktzahl: 10
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
selbstverfasste Formelsammlung (mit abzugeben) von drei einseitig beschriebenen, mit bloßem Auge lesbaren DIN-A4-Seiten; keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript)

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $y \neq \pm 1$ eine Funktion f durch $f(x,y) = \frac{x^2-1}{y^2-1}$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Niveau„linie“ mit $f(x,y) = 0$ und die mit $f(x,y) = 1$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = \sin(xy-4)$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(1,4)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(1{,}2, 3{,}9)$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 7$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Wenn ja, an welchen Punkten (x,y)? Handelt es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein Minimum? Begründung! — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x + y$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(1,3)$ und $(3,3)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $(x,y) \neq (0,0)$ eine Funktion f definiert durch $f(x,y) =$ — 2 P.

$1/(x^2 + y^2)$. Integrieren Sie diese Funktion über den Kreisring mit Zentrum im Ursprung, innerem Radius 2 und äußerem Radius 3.

6. Konkretisieren Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise (mehrere Lösungsmöglichkeiten) so, dass alle Kurvenpunkte auf der Randlinie des Einheitskreises liegen: 2 P.

$$\vec{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \text{von } t \text{ abhängiger Ausdruck} \\ t \end{pmatrix}$$

7. Ist eine Tangente an folgende Kurve parallel zur y-Achse? Wenn ja: An welchen Stellen $t \in \mathbb{R}$ ist das der Fall? 1 P.

$$\vec{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ 42t \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve: 2 P.

$$\vec{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 3 sei auf $[0,3)$ definiert durch 2 P.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ 2 & \text{für } 2 \leq t < 3 \end{cases}$$

und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{2\pi i k t/3}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwicklen. Berechnen Sie die komplexen Zahlen c_0 und c_6. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 3$ summiert.

10. Ein Produkt A konkurriere auf dem Markt mit einem Produkt B. Die Anwenderzahlen ändern sich nur durch folgende zwei Prozesse: 2 P.

- Pro Monat kommen 100 Anwender zum Produkt A und 200 Anwender zum Produkt B hinzu, die bislang weder A noch B benutzt haben.
- Von den Anwendern des Produkts A wechseln pro Monat 0,1 Prozent zum Produkt B.

Die Zahl der Anwender des Produkts A heiße a, die Zahl der Anwender des Produkts B heiße b. Interpretieren Sie a und b näherungshalber als reelle Zahlen statt als ganze Zahlen (d. h. a und b seien hinreichend groß). Stellen Sie für die Zeitabhängigkeit von a und b eine Differentialgleichung auf (nur aufstellen, nicht lösen). Benutzen Sie dabei korrekte Einheiten.

11. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = x^2/y$ zum an $x = 1$ vorgegebenen Startwert $y = 3$. 2 P.

12. Wie verhalten sich alle Lösungen der Differentialgleichung $2y'' + 12y' + 20y = 0$ für $x \to +\infty$? Rechenweg! 2 P.

13. Zwei Würfel seien unabhängig, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse (Rechenweg!): 2 P.

$$A = \{\text{Keiner der beiden Würfel zeigt eine 1.}\},$$

$$B = \{\text{Beide Augenzahlen sind ungerade.}\}$$

14. Eine Zufallsgröße X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte: 2 P.

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung. Begründen Sie anschaulich, warum der Erwartungswert größer ist als 1.

15. Ein Server stehe für 100 Benutzer bereit. Jeder davon greife unabhängig von den anderen auf den Server zu. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Benutzer zwischen 11:00 und 12:00 Uhr auf den Server zugreift, betrage für jeden Benutzer $\frac{1}{10}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 11:00 und 12:00 Uhr genau drei beliebige der 100 Benutzer zugreifen? (nicht weiter vereinfachen) 2 P.