Mathematik für Informatiker (MI)
Klausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
6. März 2002

Maximale Punktzahl: 30, Mindestpunktzahl: 11
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
selbstverfasste Formelsammlung (mit abzugeben) von drei einseitig beschriebenen, mit bloßem Auge lesbaren DIN-A4-Seiten; keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript)

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = \exp(y^2 - x)$ definiert. Bestimmen Sie die Menge der Punkte (x, y) mit $f(x, y) = 0$ und die Menge der Punkte (x, y) mit $f(x, y) = 1$. Skizzieren Sie letztere Menge auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$. 2 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^3 \cos(y^2)$ definiert. Finden Sie einen Punkt (x, y), sodass die Funktion an $(x + 0{,}1, y + 0{,}2)$ in linearer Näherung um 0,3 größer ist als an (x, y). (keine eindeutige Lösung) 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^2 - 2x + y^3 - 3y$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Wenn ja, an welchen Punkten (x, y)? Handelt es sich jeweils um ein lokales Maximum oder ein Minimum? Begründung! 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = y$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Parallelogramms mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ und $(1, 1)$. (Ggf. Skizze!) 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $(x, y) \neq (0, 0)$ eine Funktion f definiert durch 2 P.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Integrieren Sie diese Funktion über die Menge aller Punkte (x, y) des $\mathbb{R}^2$, die außerhalb des Einheitskreises liegen. Hinweis: Die Stammfunktion von $(\cos(\phi))^2$ ist $\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi) + C$.

6. Konkretisieren Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise (keine eindeutige Lösung) so, dass die Kurve beim Parameterwert $t = 1/2$ eine Tangente mit einer Steigung von $-45°$ besitzt. Begründen Sie, dass das der Fall ist. 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} ? \\ t^{42} \end{pmatrix}$$

7. Schneidet folgende Kurve die x-Achse? Wenn ja: An welchen Stellen t des Definitionsbereichs ist das der Fall? 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ 7t + 42 \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve: 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ t^2 \\ \frac{2}{3 \cdot 24}(24t + 20)^{3/2} \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 3 sei auf $[0, 3)$ definiert durch 2 P.

$$f(t) = \begin{cases} \exp(2\pi i t) & \text{für } 0 \leq t < 1/2 \\ 0 & \text{für } 1/2 \leq t < 3 \end{cases}$$

und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(2\pi i k t/3)$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwickeln. Berechnen Sie die komplexe Zahl c_6.

10. Ein natürlicher Wasserkreislauf beruhe auf folgenden Prozessen: 2 P.

- Pro Tag regnen 10^6 kg aus den Wolken herab.
- Pro Tag verdunstet der 10^5te Teil des in Gewässern und Grund enthaltenen Wassers und steigt in die Wolken auf.

Die Menge des Wassers in den Wolken heiße W, die in Gewässern und im Grund heiße G. Stellen Sie für die Zeitabhängigkeit von W und G eine Differentialgleichung auf (nur aufstellen, nicht lösen). Benutzen Sie dabei korrekte Einheiten.

11. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = \sqrt{x}\, e^{-y}$ zum an $x = 3$ vorgegebenen Startwert $y = 7$. 2 P.

12. Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung 2 P.

$$y'' - 4y = \sin(x).$$

Hinweis: Als Ansatz für eine *spezielle* Lösung können Sie $y(x) = a\sin(x)$ mit einem noch zu bestimmenden $a \in \mathbb{R}$ benutzen.

13. Zwei Würfel seien unabhängig voneinander, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig einmal geworfen. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse: 2 P.

$$A = \{\text{Die Summe der Augenzahlen beider Würfel ist 3.}\},$$

$$B = \{\text{Keiner der beiden Würfel zeigt eine 6.}\}$$

14. Von einer Zufallsgröße X sei bekannt, dass sie nur die Werte 1 und 2 annimmt und dass sie den Erwartungswert 5/3 hat. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_1, mit der X gleich 1 ist, und die Wahrscheinlichkeit p_2, mit der X gleich 2 ist. 2 P.

15. Bei der Produktion von LC-Displays mit jeweils 100.000 Pixeln habe im Schnitt jedes zweite Display kein einziges defektes Pixel. Finden Sie ein einfaches, aber sinnvolles stochastisches Modell, mit dem Sie folgende Frage beantworten: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Display aus dieser Fertigung exakt *ein* defektes Pixel besitzt? (Ausdruck nicht weiter vereinfachen) 2 P.