Mathematik für Informatiker (MI)
Klausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
8. Februar 2002

Maximale Punktzahl: 30, Mindestpunktzahl: 11
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
selbstverfasste Formelsammlung (mit abzugeben) von drei einseitig beschriebenen, mit bloßem Auge lesbaren DIN-A4-Seiten; keine weiteren Hilfsmittel (insbesondere kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript)

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2]\times[-2,2]$ die Niveaus $f(x,y) = 1$ und $f(x,y) = e$. — 2 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x^2 \sin(y)$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(1,0)$. Geben Sie einen Punkt (x,y) in der Nähe von $(1,0)$ an, an dem die Funktion in linearer Näherung den Wert $0,01$ besitzt (Lösung nicht eindeutig). — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = (x^3 - 6x^2 + 12x + 4)(1 + y^2)$ definiert. Suchen Sie mit den üblichen Kriterien (zweite Ableitung) lokale Maxima und Minima. — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x^2y^2$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,-1)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \exp(-\sqrt{x^2+y^2})$ — 2 P.

definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die obere Halbebene, also die Menge aller (x, y) mit $y \geq 0$. (Polarkoordinaten!)

6. Verläuft eine Tangente an folgende Kurve parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? 2 P.

   Wenn ja: An welchen Stellen $t \in \mathbb{R}$ ist das der Fall?

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

7. Gegeben sei die parametrisierte Kurve: 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

   Ergänzen Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve so (keine eindeutige Lösung), dass sie die gleiche geometrische Figur beschreibt wie die erste Kurve:

$$\vec{q} : [\mathbf{2}, \mathbf{5}] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} ? \\ ?? \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie $T > 0$ so, dass die Länge folgender Kurve zwischen $t = 0$ und $t = T$ gleich 3 ist: 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 7 sei auf $[0, 7)$ definiert durch 2 P.

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{wenn } 3 \leq t \leq 4 \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

   und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{2\pi i k t/7}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwicklen. Bestimmen Sie die komplexen Zahlen c_0 und c_{14}. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 3$ summiert.

10. Der Tagesumsatz U eines bestimmten Gutes und sein Preis P sollen auf folgende Weise voneinander abhängen: Wächst (bzw. fällt) der Preis um irgendeinen Prozentsatz, fällt (bzw. wächst) der Tagesumsatz umgekehrt um den halben Prozentsatz. Drücken Sie das als Zusammenhang zwischen dU/dt und dP/dt aus. (Gleichung aufstellen, nicht lösen) 2 P.

11. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = (1 + x^2)\, e^{-y}$ zum an $x = 0$ vorgegebenen Startwert y_0. 2 P.

12. Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 5y' + 6y = 6x$. Hinweis: Eine spezielle Lösung ist $y(x) = x - \frac{5}{6}$. 2 P.

13. Ein Würfel soll so konstruiert werden, dass die Ereignisse „gerade Zahl“ und „Zahl ≥ 3“ voneinander unabhängig sind. Formulieren Sie diese Bedingung als Gleichung, in der nur (!) die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(\{1\})$, $P(\{2\})$, $P(\{3\})$, $P(\{4\})$, $P(\{5\})$ und $P(\{6\})$ auftreten. 2 P.

14. Ein Würfel liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5 und 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Der Würfel werde 100mal geworfen; die Ergebnisse der Würfe seien voneinander unabhängig. Die Zufallsgröße X sei gegeben als die Summe der 100 gewürfelten Augenzahlen. Bestimmen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X. 2 P.

15. Ein Programmpaket bestehe aus 1.000.000 Zeilen Code. Aufgrund von Erfahrungen mit anderen Projekten gehen Sie davon aus, dass davon 10.000 Zeilen Fehler enthalten. Sie haben aus dem Paket ein Modul mit 100 Zeilen Umfang zu bearbeiten. Schätzen Sie sinnvoll mit Hilfe nur dieser Informationen die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Modul fehlerlos ist. Welche klassische Verteilung benutzen Sie? (keine eindeutige Lösung) 2 P.