Mathematik für Informatiker
Probeklausur: Mathematik 1

Jörn Loviscach
17. Juli 2001

Maximale Punktzahl: 38, Mindestpunktzahl: 13
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben),
kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Sei x eine reelle Zahl. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$. — 1 P.

2. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(1, 3) \cup [0, 2]$ wieder als Intervall. — 1 P.

3. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $\frac{2+3i}{1-i} = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 2 P.

4. Seien a, b und x positive reelle Zahlen, $a \neq 1$. Lösen Sie nach x auf: $\sqrt[x]{a} = b$. — 1 P.

5. Schreiben Sie das reelle Polynom $p(x) = 4x^3 + 4x$ vollständig in (ggf. komplexe) Linearfaktoren zerlegt. — 2 P.

6. Durch die Punkte $(2, 1)$ und $(1, 1)$ des $\mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Gerade. Stellen Sie dafür eine Gleichung auf und errechnen Sie die zwei Punkte $\in \mathbb{R}^2$ dieser Geraden, die den Abstand $\sqrt{2}$ vom Ursprung haben. — 3 P.

7. Die Punkte $(1,1,1)$, $(2,1,2)$ und $(2,2,3)$ des $\mathbb{R}^3$ spannen ein Dreieck auf. Berechnen Sie dessen Fläche. 2 P.

8. Schreiben Sie die Drehung von $\mathbb{R}^2$ um $45°$ gegen den Uhrzeigersinn mit Mittelpunkt $(1,2)$ als affine Transformation, also mit Hilfe einer Matrix und eines Verschiebungsvektors. 2 P.

9. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ und $(1,2,4)$. Bestimmen Sie die Schnittmenge dieser Ebene mit der Geraden, die durch $(3,2,1)$ und $(4,3,3)$ verläuft. 2 P.

10. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 3 P.

11. Geben Sie alle komplexen Zahlen z an, die $z^4 = -1$ erfüllen. (Kein Rechenweg.) Geben Sie nur voneinander verschiedene Lösungen z an. 2 P.

12. Ist die Folge $(n^2 + 7n)/(4n^2 + \cos(n) + 2)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

13. Geben Sie eine Rechenvorschrift $f(x)$ für irgendeine gebrochenrationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die eine Polstelle bei $x = 1$ besitzt und asymptotisch gegen die Gerade $y = 2x$ strebt. 2 P.

14. Rechnen Sie aus: 2 P.
$$\frac{d}{dx}\left(x^6 + 3\sin(x^2) + \frac{42x}{1+x^2}\right)$$

15. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[0, 10]$ und sei definiert durch $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 2$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Begründung! 3 P.

16. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(2x + 7)$. 1 P.

17. Berechnen Sie: 2 P.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$$

18. Berechnen Sie z. B. per Substitution: 2 P.
$$\int_3^{\infty} x\, e^{(-x^2)}\, dx$$

19. Entwickeln Sie die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ an $x = 0$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.

20. Bestimmen Sie eine unendliche Reihe, die sich summiert zu: 2 P.
$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$