Mathematik für Informatiker
Klausur: Mathematik 1

Jörn Loviscach
6. August 2001

Maximale Punktzahl: 36, Mindestpunktzahl: 12
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel:
Formelsammlung (selbstverfasst, drei Seiten, mit bloßem Auge lesbar, einseitig beschrieben, mit abzugeben),
kein Taschenrechner, keine andere Formelsammlung, kein Skript

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Sei z eine komplexe Zahl. Geben Sie eine notwendige Bedingung dafür an, dass $z^{42} = 1$ (aber eine andere Bedingung als $z^{42} = 1$ selbst). — 1 P.

2. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(0, 3] \setminus (1, 2]$ als Vereinigungsmenge zweier Intervalle. — 1 P.

3. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $(i - 2)(a + bi) = 3$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 2 P.

4. Seien a, b und x positive reelle Zahlen, $a \neq 1$. Lösen Sie nach x auf: $\sqrt[b]{1 + a^x} = 2$. — 1 P.

5. Durch die Punkte $(2, 2)$ und $(1, 3)$ des $\mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Gerade. Bestimmen Sie rechnerisch, ob sie den Kreis mit Radius $\sqrt{8}$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ schneidet. Wenn ja, wo? — 2 P.

6. Die Punkte $(1, 4, 3)$, $(1, 2, 1)$ und $(1, 0, 3)$ spannen im $\mathbb{R}^3$ ein Dreieck auf. Weisen Sie rechnerisch nach, dass einer dessen Winkel $90°$ misst. — 2 P.

7. Schreiben Sie die Punktspiegelung von $\mathbb{R}^2$ am Zentrum $(2,3)$ als affine Transformation, also mit Matrix und Verschiebungsvektor. 2 P.

8. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ enthalte die Punkte $(1,0,0)$, $(2,3,0)$ und $(4,5,1)$. Bestimmen Sie die Schnittmenge dieser Ebene mit der Geraden, die durch $(4,0,3)$ und $(6,3,4)$ verläuft. 2 P.

9. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2 P.

10. Drücken Sie $\sin(7\phi)$ für beliebiges $\phi \in \mathbb{R}$ so aus, dass nur $e^{i\phi}$ und $e^{-i\phi}$ vorkommen, aber keine anderen Funktionen von ϕ. (Nicht weiter vereinfachen.) Beispiel für einen Ausdruck dieser Art: $(e^{i\phi})^{42} - ie^{-i\phi}$ 2 P.

11. Ist die Folge $(\sin(n) - 3/n)/(7n^2 + e^n)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ für $n \to \infty$ konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

12. Besitzt die auf $\mathbb{R}$ durch $f(x) = (2x^3 + 1)/(x^2 + 2)$ definierte Funktion f für $x \to \pm\infty$ eine Asymptotengerade? Wenn ja, welche? 2 P.

13. Rechnen Sie aus (nicht weiter vereinfachen): 2 P.
$$\frac{d}{dx}\left(x^5 + \ln(1 + x^2) + \frac{7x + 3}{1 + x^4}\right)$$

14. Eine Funktion f habe den Definitionsbereich $[0,1]$ und sei bestimmt durch $f(x) = x - x^2$. Was ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt? Vollständige Begründung! 2 P.

15. Finden Sie eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (5x - 9)^3$. 1 P.

16. Berechnen Sie: 3 P.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$$

17. Berechnen Sie z. B. per partieller Integration (Rechenweg!): 2 P.
$$\int_0^\pi x\,\cos(2x)\,dx$$

18. Schätzen Sie die Fläche eines Viertels der Einheitskreisscheibe per Simpson-Verfahren (ein Doppelstreifen) für die Funktion $\sqrt{1 - x^2}$. 2 P.

19. Entwickeln Sie die auf $[-1, \infty)$ durch $f(x) = (x + 1)^{3/2}$ definierte Funktion f an $x = 0$ bis einschließlich der zweiten Ordnung nach Taylor. 2 P.

20. Bestimmen Sie eine unendliche Reihe, die sich summiert zu: 2 P.
$$\int_0^1 \exp(-x^2)\,dx$$