Mathematik für Ingenieure
Probeklausur: Differentialrechnung

Jörn Loviscach
23. Dezember 2000, revidiert am 12. Januar und 4. Februar 2001

Maximale Punktzahl: 32, Mindestpunktzahl: 8
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

1. Geben Sie eine Rechenvorschrift für das allgemeine Folgenglied a_n an: 1 P.

n	1	2	3	4	…
a_n	16	8	4	2	…

2. Geben Sie eine Rechenvorschrift für das allgemeine Folgenglied a_n an: 2 P.

n	1	2	3	4	…
a_n	$3\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{4}$	$2\frac{4}{5}$	…

3. Ist die Folge $\frac{n^2+3}{n^3+3n+2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 1 P.

4. Ist die Folge $n^2 - \frac{3n^4}{3n^2+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, konvergent? Wenn ja, was ist ihr Grenzwert? 2 P.

5. Geben Sie eine Folge a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, an, sodass a_n/n^3 für $n \to \infty$ **nicht** konvergiert. 1 P.

6. Zeigen Sie, dass die Folge 10^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, keine obere Schranke besitzt. Nehmen Sie dazu an, es **gäbe** eine solche Schranke. 2 P.

7. Geben Sie die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$ an. 1 P.

8. Zeigen Sie per Quotientenkriterium, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$ konvergiert. 2 P.

9. Die Funktion f sei für $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$ definiert. Skizzieren Sie schematisch ihren Verlauf an der Nullstelle $x = 4$. 1 P.

10. Geben Sie die Nullstellen der auf $\mathbb{R}\backslash\{1, -3\}$ definierten Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3+2x^2-3x}$ an. 1 P.

11. An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Rechenvorschrift $f(x) = \frac{x^3-3x-2}{x^2-5x+6}$ nicht definiert? Welche Stellen davon sind Polstellen, welche nicht? 2 P.

12. Besitzt die auf $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{3x^5+2x^4-3x^3+2x^2-5x+6}{x^4+3}$ definierte Funktion eine Asymptotengerade für $x \to \pm\infty$? Wenn ja, welche? 1 P.

13. Skizzieren Sie schematisch, wie die auf $\mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ durch die Rechenvorschrift $f(x) = \frac{x+3}{x^3-5x^2+8x-4}$ definierte Funktion f für $x \downarrow 2$ und für $x \uparrow 2$ ins Unendliche läuft. 2 P.

14. Bestimmen Sie den Grenzwert von $\sqrt{3 + x^2 \sin(1/x)}$ für $x \to 0$, $x \neq 0$. 1 P.

15. Begründen Sie, warum die auf $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = x \cos(x)$ definierte Funktion für mindestens ein x den Wert 7 annehmen muss. 1 P.

16. Bestimmen Sie $\frac{d^3}{dx^3}(x^3 + 2x^2 - 5x + 3)$. 1 P.

17. Bestimmen Sie $\frac{d}{du}\left(\frac{u}{1+u^2}\right)$. (Ergebnis nicht weiter vereinfachen) 2 P.

18. An welcher Stelle $x \in \mathbb{R}$ besitzt $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 26$ ein lokales Maximum? Begründen Sie, dass es sich um ein lokales Maximum handelt. 2 P.

19. Ist die auf $x \in \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{x^3}{3} + x + 7$ definierte Funktion streng monoton wachsend oder streng monoton fallend oder keines von beiden? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.

20. Folgern Sie aus $(x^3 + f(x))^2 = \sin(x)$ unter der Annahme, dass f an x differenzierbar ist, eine Gleichung, die $f'(x)$ enthält. (Ergebnis nicht weiter vereinfachen) 1 P.

21. Berechnen Sie den Grenzwert von $\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$ für $x \to 0$, $x \neq 0$, mit der Regel von L'Hospital. 1 P.

22. Entwickeln Sie $\sin(x^2 - 1)$ um die Stelle $x = 1$ nach Taylor bis zur zweiten Ordnung (einschließlich). 3 P.