Mathematik für Ingenieure
Probeklausur: Algebra

Jörn Loviscach
28. Januar 2000

Maximale Punktzahl: 26, Mindestpunktzahl: 9
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

1. Seien x eine reelle Zahl. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass $x^2 \leq 1$. Ist die von Ihnen angegebene Bedingung zugleich notwendig für $x^2 \leq 1$? Begründung! — 2 P.

2. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $[2, 4) \cup (-1, 3]$ wieder als Intervall. — 1 P.

3. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $(1 - 2i)(2 + i) = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 1 P.

4. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $\frac{1-2i}{2+i} = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 2 P.

5. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie nach x auf: $\sqrt[a]{x} = b$. — 1 P.

6. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie nach x auf: $3^{-ax} = b$. — 2 P.

7. Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ sei gegeben als die Menge aller $\vec{x}$ mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2$. — 1 P.

   Welche geometrische Bedeutung hat dabei der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

8. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

9. Geben Sie reelle Zahlen a, b, c, d, e, f an, sodass die affine Abbildung 2 P.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

eine Punktspiegelung des $\mathbb{R}^2$ am Zentrum $(2, 3)$ beschreibt.

10. Sind die folgenden drei Vektoren voneinander linear abhängig oder nicht? Begründung! 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

11. Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen folgenden Vektoren: 2 P.
$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

12. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$. 2 P.

13. Bestimmen Sie einen Vektor des $\mathbb{R}^3$, der ungleich dem Nullvektor ist und senkrecht zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie gleichzeitig senkrecht zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist. 2 P.

14. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} 1x - 1y + 0z + 0u &= 1 \\ 3x - 2y - 1z - 1u &= 3 \\ 5x - 2y - 2z - 5u &= 5 \end{aligned}$$

15. Bestimmen Sie reelle Zahlen r und $\phi \in [0, 2\pi)$ so, dass $2 - 2i = r\, e^{i\phi}$, wobei i die imaginäre Einheit ist. 1 P.

16. Geben Sie $\cos(\pi/3)$ (Bogenmaß) als Zahlenwert an. 1 P.

17. Drücken Sie $\cos(4x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. 2 P.