Mathematik für Ingenieure
Probeklausur: Algebra

Jörn Loviscach
27. Dezember 2000, revidiert am 7. Februar 2001

Maximale Punktzahl: 23, Mindestpunktzahl: 9
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

1. Seien x und y reelle Zahlen. Geben Sie eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dafür an, dass $x + y \geq 0$. Erklären Sie, warum die von Ihnen angegebene Bedingung hinreichend ist. Belegen Sie, dass sie aber nicht notwendig ist. — 2 P.

2. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(3, 5] \cap (-1, 4)$ wieder als Intervall. — 1 P.

3. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $(3 + 5i)(4 + 3i) = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 1 P.

4. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $\frac{3+5i}{4+3i} = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 2 P.

5. Seien a, b und x reelle Zahlen, a sei positiv und ungleich 1, b sei ungleich null. Lösen Sie nach x auf: $7 = a^{(x+2)/b}$. — 2 P.

6. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 100 und 602. — 1 P.

7. Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ sei gegeben als die Menge aller (x, y) mit $3x-4y = 2$. Welchen Abstand hat diese Gerade vom Ursprung? — 1 P.

8. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

9. Geben Sie reelle Zahlen a, b, c, d, e, f an, sodass die affine Abbildung 2 P.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um $+90°$ mit Drehungsmittelpunkt $(1, 2)$ beschreibt.

10. Geben Sie eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ an, sodass die folgenden drei Vektoren voneinander linear **ab**hängig sind: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ x \end{pmatrix}$$

11. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 0z + 1u &= 2 \\ 2x + 5y + 1z + 3u &= 5 \\ 1x + 5y + 4z + 5u &= 7 \\ -1x + 0y + 3z + 2u &= 1 \end{aligned}$$

12. Finden Sie alle Eigenwerte folgender Matrix: 2 P.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

13. Die Zahl 3 ist Eigenwert folgender Matrix: 2 P.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die Menge der zugehörigen Eigenvektoren mit Hilfe einer Geraden- oder einer Ebenengleichung, je nach der Dimension dieser Menge.

14. Geben Sie $\tan(\pi/4)$ (Bogenmaß) als Zahlenwert an. 1 P.

15. Drücken Sie $\sin(3x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. 2 P.