Mathematik für Ingenieure
Probeklausur: Algebra

Jörn Loviscach
3. Dezember 2000, revidiert am 26. Januar 2001

Diese Probeklausur umfasst bloß den bis jetzt behandelten Stoff!
Insbesondere fehlen noch: Determinante, lineare Gleichungssysteme, Schnittpunkte, exp, sin, cos.
Maximale Punktzahl: 32, Mindestpunktzahl: 12
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $p \vee (q \wedge \neg p) \;\Leftrightarrow\; p \vee q$ für alle Aussagen p und q. — 2 P.

2. Sei x eine reelle Zahl. Geben Sie eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung dafür an, dass $x^2 > 1$. Erklären Sie, warum die von Ihnen angegebene Bedingung notwendig ist. Belegen Sie, dass sie aber nicht hinreichend ist. — 2 P.

3. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(-3, 4] \cup [2, 5]$ wieder als Intervall. — 1 P.

4. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(-3, 4] \setminus [2, 5]$ wieder als Intervall. — 1 P.

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (\sin(x))^2 + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Begründen Sie, warum er nicht größer und nicht kleiner sein kann als von Ihnen angegeben. — 2 P.

6. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $(2 + 4i)(1 + 2i) = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. — 1 P.

7. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $\frac{2+4i}{1+2i} = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. 2 P.

8. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie nach x auf: $x^a = \frac{2}{x^b}$. 1 P.

9. Seien a, b und x reelle Zahlen, a sei positiv. Lösen Sie nach x auf: $a = 7^{3x+b}$. 2 P.

10. Berechnen Sie eine Zahl x mit $0 \leq x \leq 14$ und $2^{400} = x \pmod{15}$. 1 P.

11. Die Menge $\{A, B, C, D\}$ wird durch die in der Tabelle definierte Rechenoperation $\sharp$ zu einer Gruppe. Geben Sie das neutrale Element an; begründen Sie, warum dieses Element das neutrale ist. 1 P.

$\sharp$	A	B	C	D
A	B	D	A	C
B	D	C	B	A
C	A	B	C	D
D	C	A	D	B

12. Geben Sie den Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{101}{2}$ als Zahl an. 1 P.

13. Schreiben Sie $(1 + x)^6$ als Summe von geeigneten Vielfachen von x, x^2, x^3, x^4, x^5 und x^6 plus einer Konstanten. 1 P.

14. Das Polynom $p(x) = 2x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 6x + 3$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$. Spalten Sie **so oft wie möglich** den entsprechenden Linearfaktor ab. 3 P.

15. Geben Sie die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ als Zahl an. 1 P.

16. Geben Sie einen Vektor $\in \mathbb{R}^3$ an, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht und ungleich dem Nullvektor ist. 1 P.

17. Durch die Punkte $(-1, 0)$ und $(0, 2)$ des $\mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Gerade. Geben Sie eine Gleichung für diese Gerade in Punkt-Richtungs-Form an. 1 P.

18. Eine bestimmte Ebene im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben als die Menge aller $\vec{p}$ mit $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{p} = 1$. Bestimmen Sie den Abstand dieser Ebene vom Ursprung. 2 P.

19. Geben Sie eine Zahl x an, sodass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}$ voneinander linear abhängen. Begründen Sie, dass das mit der von Ihnen angegebenen Zahl der Fall ist. 2 P.

20. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

21. Schreiben Sie die Spiegelung von $\mathbb{R}^2$ an der x-Achse mit Hilfe einer Matrix. Gesucht ist also eine solche Matrix, dass ein gespiegelter Vektor gleich der Matrix mal dem ursprünglicher Vektor ist. 1 P.

22. Berechnen Sie die Matrixnorm der folgenden Matrix (Rechenweg!): 2 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$