Mathematik für Ingenieure
Klausur: Algebra

Jörn Loviscach
7. Februar 2001

Maximale Punktzahl: 26, Mindestpunktzahl: 9
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

Nachname, Vorname

Matrikelnummer

1. Zeigen Sie per Wahrheitstafel: $\neg(p \wedge \neg q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p) \vee q$ für alle Aussagen p und q. 2 P.
2. Sei x eine reelle Zahl. Geben Sie eine notwendige Bedingung dafür an, dass $|x| \geq 3$. 1 P.
3. Schreiben Sie das Ergebnis der Mengenoperation $(-1, 2] \cap (0, 3]$ wieder als Intervall. 1 P.
4. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $(3 + 2i)(1 + i) = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. 1 P.
5. Geben Sie reelle Zahlen a und b an, sodass $\frac{3+2i}{1+i} = a + bi$, wobei i die imaginäre Einheit ist. 2 P.
6. Seien a, b und x positive reelle Zahlen. Lösen Sie nach x auf: $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^a = b$. 1 P.
7. Seien a, b und x positive reelle Zahlen, $a \neq 1$. Lösen Sie nach x auf: $a^{-x/3} = b$. 2 P.
8. Schreiben Sie $(1 - x)^5$ als Summe von geeigneten Vielfachen von x, x^2, x^3, x^4, x^5 plus einer Konstanten. 1 P.
9. Das Polynom $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ hat eine Nullstelle bei $x = 2$. Spalten Sie **so oft wie möglich** den entsprechenden Linearfaktor ab. 1 P.
10. Durch die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 3)$ des $\mathbb{R}^2$ verläuft genau eine Gerade. Stellen Sie dafür eine Gleichung auf und prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $(3, 5)$ auf dieser Geraden liegt. 2 P.

11. Geben Sie zwei verschiedene Vektoren (ungleich dem Nullvektor) an, die senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind. 1 P.

12. Rechnen Sie folgendes Matrizenprodukt aus: 1 P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

13. Schreiben Sie die Spiegelung von $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $y = x$ mit Hilfe einer Matrix. Gesucht ist also eine solche Matrix, dass ein gespiegelter Vektor gleich der Matrix mal dem ursprünglichen Vektor ist. 1 P.

14. Berechnen Sie die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 2 P.

15. Sind die folgenden drei Vektoren voneinander linear abhängig oder nicht? Begründung! 1 P.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

16. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungsmenge $\subset \mathbb{R}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems: 2 P.

$$\begin{aligned} 1x + 0y + 1z + 4u &= 1 \\ 1x + 1y + 1z + 7u &= 1 \\ 2x + 2y + 3z + 16u &= 3 \\ -1x + 1y + 2z + 2u &= 2 \end{aligned}$$

17. Welche reellen Eigenwerte besitzt folgende Matrix (falls sie überhaupt welche besitzt)? Rechenweg! 1 P.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

18. Bestimmen Sie reelle Zahlen r und ϕ so, dass $r\,e^{i\phi} = 3i$, wobei i die imaginäre Einheit ist. 1 P.

19. Drücken Sie $\cos(3x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ausschließlich mit $\sin(x)$ und $\cos(x)$ aus. 2 P.