Mathematik für Informatiker (MI) Probeklausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
3. Februar 2001

Maximale Punktzahl: 24, Mindestpunktzahl: 8
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^2 - 2xy$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$ die Niveaulinie mit $f(x, y) = 0$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear an der Stelle $(x, y) = (2, 1)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(x, y)$ am Punkt $x = 2{,}01$, $y = 0{,}99$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^2y - 4xy + 4y$ definiert. Kann man mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitungen an der Stelle $(2, 1)$ entscheiden, ob dort ein lokales Minimum von f liegt? Begründung! — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = xy$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Einheitskreises. (Polarkoordinaten!) — 2 P.

6. Konkretisieren Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf — 1 P.

beliebige Weise so, dass die Kurve am Punkt $(1,1)$ startet und am Punkt $(2,3)$ endet:

$$\vec{p}:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \vec{p}(t)=\begin{pmatrix}\text{von } t \text{ abhängiger Ausdruck}\\ \text{anderer von } t \text{ abhängiger Ausdruck}\end{pmatrix}$$

7. Geben Sie einen Vektor an, der in die Richtung der Tangente an die folgende parametrisierte Kurve beim Parameterwert $t=2$ zeigt: 1 P.

$$\vec{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{p}(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2t\\ \sqrt{t^2+1}\end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve zwischen $t=2$ und $t=5$: 2 P.

$$\vec{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{p}(t)=\begin{pmatrix}\sin(t^2)\\ \cos(t^2)\\ t^2\end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 5 sei auf $[0,5)$ definiert durch $f(t)=t$ und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi ikt/5}$ mit geeigneten $c_k\in\mathbb{C}$ entwicklen. Bestimmen Sie die komplexe Zahl c_5. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t=5$ summiert. Hilfsmittel: $\int_0^a dt\, t\, e^{ibt}=(e^{iab}(1-iab)-1)/b^2$ für alle reellen Zahlen a und b, $b\neq 0$. 2 P.

10. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'=x^3y^2$ zum an $x=0$ vorgegebenen Startwert $y_0>0$. 2 P.

11. Die Raumluft in einem Zimmer habe die Temperatur T (gemessen in Grad Celsius); die Außentemperatur sei unveränderlich 13 Grad Celsius. Durch die Wände fließt Wärme ab, sodass sich die Raumluft ohne Heizung pro Grad Temperaturdifferenz zwischen Innen und Außen um 2 Grad pro Stunde abkühlen würde. Im Zimmer ist aber ein Ofen installiert, der die Innenluft pro Stunde um 3 Grad Celsius erwärmen könnte, wenn *keine* Wärme abflösse. Stellen Sie die Differentialgleichung für die zeitliche Entwicklung der Innentemperatur mit Heizung und Wärmeverlust auf. 1 P.

12. Beschreiben Sie das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung $y''-3y'+2y=0$ für $x\to\infty$. 2 P.

13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Wurf zweier unabhängiger idealer Würfel mindestens einer davon die Augenzahl 6 zeigt? 1 P.

14. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse beim Wurf zweier unabhängiger idealer Würfel: 1 P.

$$A = \{\text{Beide Würfel zeigen die gleiche Augenzahl.}\},$$

$$B = \{\text{Die Summe der Augenzahlen beträgt 4.}\}$$

15. Eine Zufallsgröße X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte: 2 P.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } 2 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X.