Mathematik für Informatiker (MI)
Probeklausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
26. Dezember 2000, revidiert am 7. Februar 2001

Maximale Punktzahl: 23, Mindestpunktzahl: 8
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $x \neq 0$ eine Funktion f durch $f(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Niveau„linien“ mit $f(x,y) = 0$ und $f(x,y) = 1$. — 2 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x^2 + xy$ definiert. In welcher Richtung steigt f an der Stelle $(1,2)$ lokal am stärksten? — 1 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + 2y$ definiert. Kann an der Stelle $(1,1)$ ein lokales Maximum von f liegen? Begründung! — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x + y$ definiert. Berechnen Sie das Volumen der Teilmenge des $\mathbb{R}^3$, die durch $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq f(x,y)$ bestimmt wird. — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $x \neq 0$ eine Funktion f durch $f(x,y) = \frac{y^3 + yx^2}{x}$ definiert. Schreiben Sie diese Rechenvorschrift ausschließlich mit den Polarkoordinaten r und ϕ. (Weitmöglichst vereinfachen!) — 1 P.

6. Ergänzen Sie die folgende Definition einer parametrisierten Kurve so, — 1 P.

dass die Kurve aus denselben Punkten besteht wie der Graph der Parabel $y = x^2$:

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ ? \end{pmatrix}$$

7. Geben Sie einen Vektor an, der in die Richtung der Tangente an die folgende parametrisierte Kurve beim Parameterwert $t = 3$ zeigt: 1 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve zwischen $t = 0$ und $t = 1$: 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 6 sei auf $[0, 6)$ definiert durch 2 P.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < 2 \\ 5 & \text{für } 2 \leq t < 6 \end{cases}$$

und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{2\pi i k t/6}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwicklen. Bestimmen Sie die komplexen Zahlen c_0 und c_3. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 2$ summiert.

10. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = x^4 y$ zum an $x = 0$ vorgegebenen Startwert $y_0 > 0$. 2 P.

11. Beschreiben Sie das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ für $x \to \infty$. 2 P.

12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf zweier unabhängiger idealer Würfel die Augensumme 4 zu erhalten? 1 P.

13. Eine Zufallsgröße X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte: 2 P.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2x - x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X^2.

14. Ein Versuch wird fünfmal ausgeführt. Jedes Mal wird eine bestimmte physikalische Größe gemessen. Dabei ergeben sich die Werte 2, 3, 5, 4, 1. Was ist die optimale Schätzung des Erwartungswerts, was die optimale Schätzung der Varianz der zugrundeliegenden Zufallsverteilung? 2 P.