Mathematik für Informatiker (MI)
Klausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
6. August 2001

Maximale Punktzahl: 24, Mindestpunktzahl: 8
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

Nachname	Vorname

Matrikelnummer	E-Mail-Adresse

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $y \neq \pm 1$ eine Funktion f durch $f(x,y) = \frac{x^2-1}{y^2-1}$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2,2] \times [-2,2]$ die Niveau„linie“ mit $f(x,y) = 0$ und die mit $f(x,y) = 1$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = \sin(xy-4)$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(1,4)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(1{,}2, 3{,}9)$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = 2x^2+2xy+3y^2+7$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Wenn ja, an welchen Punkten (x,y)? Begründung! — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x,y) = x+y$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(1,3)$ und $(3,3)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $(x,y) \neq (0,0)$ eine Funktion f definiert durch $f(x,y) =$ — 2 P.

$1/(x^2+y^2)$. Integrieren Sie diese Funktion über den Kreisring mit Zentrum im Ursprung, innerem Radius 2 und äußerem Radius 3.

6. Konkretisieren Sie folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise so, dass alle Kurvenpunkte auf der Randlinie des Einheitskreises liegen: 2 P.

$$\vec{p}:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad \vec{p}(t)=\begin{pmatrix}\text{von } t \text{ abhängiger Ausdruck}\\ t\end{pmatrix}$$

7. Verläuft folgende Kurve irgendwo parallel zur y-Achse? Wenn ja: An welchen Zeitpunkten $t\in\mathbb{R}$ ist das der Fall? 2 P.

$$\vec{p}:[0,1]\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{p}(t)=\begin{pmatrix}t^2-t\\ 42t\\ \sin(\pi t)\end{pmatrix}$$

8. Eine Funktion f mit Periode 3 sei auf $[0,3)$ definiert durch 2 P.

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{für } 0\le t<2\\ 2 & \text{für } 2\le t<3\end{cases}$$

und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi ikt/3}$ mit geeigneten $c_k\in\mathbb{C}$ entwicklen. Berechnen Sie die komplexen Zahlen c_0 und c_6. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t=3$ summiert.

9. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y'=y/x$ zum an $x=1$ vorgegebenen Startwert $y=3$. 2 P.

10. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung $2y''+12y'+20y=0$ für $x\to+\infty$? Rechenweg! 2 P.

11. Zwei Würfel seien unabhängig, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\mid B)$ für folgende Ereignisse (Rechenweg!): 3 P.

$$A=\{\text{Keiner der beiden Würfel zeigt eine 1.}\},$$

$$B=\{\text{Beide Augenzahlen sind ungerade.}\}$$

12. Eine Zufallsgröße X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte: 2 P.

$$f(x)=\begin{cases}x/2 & \text{für } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.