Mathematatik für Informatiker (MI)
Klausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
20. Juni 2001

Maximale Punktzahl: 26, Mindestpunktzahl: 9
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

Nachname, Vorname

Matrikelnummer

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$ die Niveaulinie mit $f(x, y) = 0$ und die Niveaulinie mit $f(x, y) = 1$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = y^2 \cos(x - 3)$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(3, 2)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(3{,}1, 1{,}8)$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = (x^2 + 1)(1 - y^2)$ definiert. Besitzt f lokale Maxima oder Minima? Begründung! — 3 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^2y$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Parallelogramms mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(0, 1)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über das obere rechte Viertel der Einheitskreisscheibe. (Polarkoordinaten!) — 2 P.

6. Ergänzen Sie die folgende Definition einer parametrisierten Kurve auf beliebige Weise so, dass die Kurve beim Parameterwert $t = 3$ parallel zur x-Achse verläuft: 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ ? \end{pmatrix}$$

7. Skizzieren Sie den Verlauf folgender Kurve zwischen $t = 2$ und $t = 3$. Welcher Figur entspricht die Kurve geometrisch? 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\,(t-2)^2) \\ \sin(2\pi\,(t-2)^2) \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve zwischen $t = 0$ und $t = 1$: 2 P.

$$\vec{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} 3(1-t)^2 \\ 8t^{3/2} \end{pmatrix}$$

9. Eine Funktion f mit Periode 3 sei auf $[0,3)$ definiert durch $f(t) = t-2$ und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/3}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwicklen. Bestimmen Sie die komplexe Zahl c_6. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 3$ summiert. Hilfsmittel: $\int_0^a dt\, t\, e^{ibt} = (e^{iab}(1-iab)-1)/b^2$ für alle reellen Zahlen a und b, $b \neq 0$. 2 P.

10. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = y^2 \cos(x)$ zum an $x = 0$ vorgegebenen Startwert $y_0 > 0$. 2 P.

11. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung $y''+4y'+5y = 0$ für $x \to +\infty$? Rechenweg! 2 P.

12. Zwei Würfel seien unabhängig, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse (Rechenweg!): 2 P.

$$A = \{\text{Die Summe beider Augenzahlen beträgt 4.}\},$$

$$B = \{\text{Mindestens einer der Würfel zeigt die Augenzahl 1.}\}$$

13. Eine diskrete Zufallsgröße X nehme nur die Werte 3, 4 und 5 an. Dabei treten der Wert 3 und der Wert 5 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ auf. Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X. Rechenweg! 2 P.