Mathematik für Informatiker (MI)
Klausur: Mathematik 2

Jörn Loviscach
9. März 2001

Maximale Punktzahl: 26, Mindestpunktzahl: 9
Dauer: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine
(d. h. kein Taschenrechner, keine Formelsammlung, kein Skript)

Nachname, Vorname

Matrikelnummer

1. Auf $\mathbb{R}^2$ sei für $x \neq -1$ eine Funktion f durch $f(x, y) = \frac{y}{x+1}$ definiert. Skizzieren Sie auf $[-2, 2] \times [-2, 2]$ die Niveaulinie mit $f(x, y) = 0$ und die Niveaulinie mit $f(x, y) = 1$. — 1 P.

2. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^3y^2$ definiert. Nähern Sie diese Funktion linear am Punkt $(x, y) = (1, 2)$. Schätzen Sie damit den Wert $f(x, y)$ am Punkt (x, y) mit $x = 1{,}1$ und $y = 2{,}1$. — 2 P.

3. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$ definiert. Liegt am Punkt $(x, y) = (1, 0)$ ein lokales Minimum von f? Begründung! — 2 P.

4. Auf $\mathbb{R}^2$ sei eine Funktion f durch $f(x, y) = xy$ definiert. Integrieren Sie diese Funktion über die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$. (Ggf. Skizze!) — 2 P.

5. Bestimmen Sie die Fläche der Kreisscheibe mit Radius 7 durch Integration in Polarkoordinaten. Rechenweg! — 2 P.

6. Skizzieren Sie den Verlauf folgender Kurve zwischen $t = -1$ und $t = 1$. Welcher Figur entspricht die Kurve geometrisch? 2 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} t^6 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

7. Geben Sie einen Vektor an, der in die Richtung der Tangente an die folgende parametrisierte Kurve beim Parameterwert $t = 3$ zeigt: 1 P.

$$\vec{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 1 + t^2 \end{pmatrix}$$

8. Eine Funktion f mit Periode 2 sei auf $[0, 2)$ definiert durch 2 P.

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{für } 1 \le t < 2 \end{cases}$$

und periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ ausgedehnt. Diese Funktion lässt sich in eine Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{2\pi i k t/2}$ mit geeigneten $c_k \in \mathbb{C}$ entwickeln. Bestimmen Sie die komplexen Zahlen c_0 und c_6. Geben Sie außerdem an, zu welchem Wert sich die Fourier-Reihe an der Stelle $t = 2$ summiert.

9. Berechnen Sie die Länge folgender Kurve zwischen $t = 0$ und $t = 1$: 2 P.

$$\vec{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(1 - t)^{3/2} \\ \frac{2}{3} t^{3/2} \end{pmatrix}$$

10. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y^2}$ zum an $x = 0$ vorgegebenen Startwert $y_0 > 0$. 2 P.

11. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ für $x \to +\infty$? Rechenweg! 2 P.

12. Zwei Würfel seien unabhängig, aber nicht ideal. Jeder liefere die Augenzahl 1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, die Augenzahlen 2, 3, 4, 5, 6 dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe beider Augenzahlen 3 beträgt? 2 P.

13. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B)$ für folgende Ereignisse beim Wurf eines idealen Würfels (Rechenweg!): 2 P.

$$A = \{\text{Die Augenzahl ist gerade.}\}, \quad B = \{\text{Die Augenzahl ist} \ge 3.\}$$

14. Eine diskrete Zufallsgröße X nehme den Wert 1 und den Wert 5 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ an. Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X. 2 P.